

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Составитель профессор М.С. Тихов

НИЖНИЙ НОВГОРОД

2018 г.

На вступительном испытании по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать:

- четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение применять их с достаточным обоснованием при решении задач;
- умение точно и сжато выразить математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику;
- уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение использовать их при решении задач.

Настоящая программа по математике для поступающих в высшие учебные заведения в 2003 году состоит из трех разделов. В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий как на письменном, так и на устном экзамене, указаны основные формулы и теоремы, которые надо уметь доказывать.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части устного экзамена. Из этого раздела берутся вопросы теоретической части устного экзамена.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на испытании, проводимого в устной и письменной формах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснить и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

1. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (\mathbb{N}). Делимость. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.

2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

3. Целые числа (\mathbb{Z}). Рациональные числа (\mathbb{Q}), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.

4. Действительные числа (\mathbb{R}), их представление в виде десятичных дробей. Рациональные и иррациональные числа. Проценты. Сравнение действительных чисел.

5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения. Равенства и тождества.

7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень. Свойства арифметических корней n -й степени. Степень с действительным показателем.

8. Одночлен и многочлен. Многочлен от одной переменной. Алгебра многочленов.

9. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.

10. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность и нечетность. Наибольшее и наименьшее значение функции.

11. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Уравнение касательной к графику функции. Производные функций $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$; $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$); $y = a^x$; $y = \ln x$.

12. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

13. Определение, основные свойства и графики функций: линейной $y = ax + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^b$, гиперболы $y = a/x$, показательной $y = a^x$ ($a > 0$), логарифмической $y = \log_a x$, тригонометрических функций ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$), арифметического корня $y = \sqrt[n]{x}$. График функции $y = a|x|$.

14. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях. Решение линейных и квадратных уравнений и уравнений, приводящихся к

квадратным. Формула корней квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.

15. Неравенства. Свойства неравенств. Доказательство неравенств. Понятие о равносильных неравенствах. Метод интервалов.

16. Системы уравнений и неравенств. Равносильность систем. Решение систем уравнений и систем неравенств.

17. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n -го члена и сумма первых n членов арифметической прогрессии. Формула n -го члена и сумма первых n членов геометрической прогрессии.

18. Логарифмы. Свойства логарифмов. Уравнения и неравенства, содержащие показательные и логарифмические функции.

19. Тригонометрические функции. Зависимость между функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения. Синус и косинус суммы (разности) двух аргументов. Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов. Преобразование в произведение сумм $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha \pm \cos \beta$. Преобразование произведения $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, $\cos \alpha \cdot \sin \beta$ в суммы.

20. Решение уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ и уравнений, к ним приводящихся. Простейшие тригонометрические неравенства.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые. Признаки параллельности прямых. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

2. Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

3. Векторы. Операции над векторами.

4. Многоугольник. Его вершины, стороны, диагонали.

5. Треугольник. Его медианы, биссектрисы, высоты. Их свойства. Виды треугольников. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Свойства равнобедренного треугольника. Сумма углов треугольника. Признаки подобия треугольников. Теорема Пифагора.

6. Четырехугольник: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника. Признаки параллелограмма.

7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор. Центральные и вписанные углы, их измерение. Касательная и секущая к окружности, их свойства. Свойства

хорд окружностей. Угол между хордами. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания.

8. Окружности, описанные около треугольника и вписанные в него. Существование окружностей, описанных около четырехугольника или вписанных в него.

9. Формула площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

10. Длина окружности и длина дуги окружности. Градусная и радианная мера углов и дуг окружностей. Площадь круга и площадь сектора. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

11. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости. Признак параллельности плоскостей.

13. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.

14. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей. Теорема о перпендикулярности двух плоскостей.

16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

18. Формула площади поверхности и объема параллелепипеда.

19. Формула площади поверхности и объема призмы.

20. Формула площади поверхности и объема пирамиды.

21. Формула площади поверхности и объема цилиндра.

22. Формула площади поверхности и объема конуса.

23. Формула площади поверхности сферы.

24. Формула объема шара.

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.

2. Свойства функции $y = a/x$ и ее график.

3. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график.

4. Формула корней квадратного уравнения.

5. Формулы сокращенного умножения.

6. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
7. Свойства числовых неравенств.
8. Логарифм произведения, степени, частного.
9. Определение и свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и их графики.
10. Определение и свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и их графики.
11. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.
12. Формулы приведения.
13. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
14. Тригонометрические функции двойного аргумента.
15. Производная суммы двух функций.
16. Уравнение касательной к графику функции.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.
2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.
3. Признаки параллельности прямых.
4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.
5. Признаки параллелограмма, его свойства.
6. Окружность, описанная около треугольника.
7. Окружность, вписанная в треугольник.
8. Касательные к окружности и их свойство.
9. Измерение угла, вписанного в окружность.
10. Признаки подобия треугольников.
11. Теорема Пифагора.
12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.
13. Формула расстояния между двумя точками плоскости.
14. Уравнение окружности.
15. Признак параллельности прямой и плоскости.
16. Признак параллельности плоскостей.
17. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.
18. Перпендикулярность двух плоскостей.
19. Теорема о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
20. Теорема о трех перпендикулярах.

3. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ИСПЫТАНИЯ, ПРОВОДИМОГО В УСТНОЙ ФОРМЕ

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n -й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
12. Свойства показательной функции и ее график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a \sin x + b \cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.
2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.

7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство срединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

4. ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТУПАЮЩЕМУ

На испытании по математике поступающий должен уметь:

1. Выполнять (без калькулятора) действия над числами, заданными в виде десятичных или обыкновенных дробей, с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; выполнять действия над числовыми выражениями; при необходимости можно пользоваться калькуляторами для производства вспомогательных вычислений, но не как способом доказательства; преобразовывать буквенные выражения; переводить одни единицы измерения величин в другие.
2. Сравнить числа (без калькулятора); проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений,

содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции; доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений.

3. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним, решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени приводящиеся к ним (в том числе с параметрами) и исследовать их решения. Сюда, в частности, относятся некоторые алгебраические уравнения и неравенства высших степеней, иррациональные уравнения и неравенства, простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.
4. Исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами. Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремум и при построении графиков функций.
5. Изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду.
6. Пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий.
7. Пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур.
8. Пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы.
9. Составлять уравнения, системы, неравенства, исходя из условия задач; решать задачи на составление уравнений и находить значения величин исходя из условия задачи.
10. Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, скалярное произведение), пользоваться свойствами этих операций.
11. Излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На испытании, проводимом в устной форме, поступающий должен дополнительно уметь:

12. Давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе программы.
13. Анализировать формулировки утверждений и их доказательства.
14. Решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.